数　　学

氏名	

受験番号	

1 2 次関数 $y=-x^2+ax+b$ のグラフ F は 2 点 $(-2,-7)$, $(2,1)$ を通り，1 次関数 $y=cx+d$ のグラフ G は F に接する。このとき次の問に答えよ。

(1) 定数 a,b の値を求めよ。

(2) 定数 d を c の式で表せ。

(3) F を 2 次関数 $y=-x^2$ のグラフに重ねる平行移動によって，G が G 自身に重なるとき，定数 c,d の値を求めよ。

(4) (3) で定めた G と, F および直線 $x=k$ で囲まれる部分の面積が 9 になるとき，定数 k の値を求めよ。

[解答欄]

(1) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} -4-2a+b=-7 \\ -4+2a+b=1 \end{cases}$ を解いて，$a=2,\ b=1$。

(2) グラフ G は F に接するので $-x^2+2x+1=cx+d$ は重解を持つ。したがって，$x^2+(c-2)x+(d-1)=0$ の判別式は 0，すなわち $(c-2)^2-4(d-1)=0$ となる。よって，$d=\dfrac{1}{4}(c-2)^2+1$。

(3) F は 2 次関数 $y=-x^2+2x+1=-(x-1)^2+2$ のグラフなので，F は x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 平行移動することで，$y=-x^2$ のグラフに重なる。この平行移動によって，G は

$$y=c(x+1)+d-2$$

のグラフに重なるので，このグラフが G と一致すればよい。すなわち，

$$c(x+1)+d-2=cx+d$$

となり $c=2$ がわかる。このとき，(2) より，$d=1$ となる。

(4) G は点 $(0,1)$ で F に接し，$(2x+1)-(-x^2+2x+1)=x^2$ なので，F,G および，$x=k$ で囲まれる部分の面積は

$$\begin{cases} \int_0^k x^2dx=\dfrac{k^3}{3} & (k>0) \\ \int_k^0 x^2dx=-\dfrac{k^3}{3} & (k<0) \end{cases}$$

となる。これらが 9 になるのは，$k=\pm 3$ のとき。

得点	

数　　学

氏 名

受 験 番 号

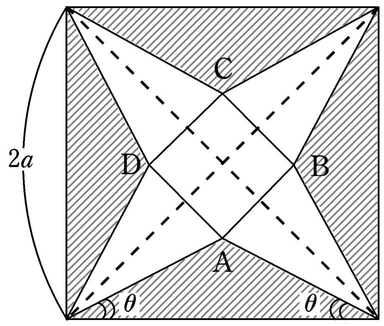
2　1辺の長さが $2a$ $(a>0)$ の正方形の折り紙がある。この正方形の折り紙から底角 θ $(0^\circ<\theta<45^\circ)$ の4つの二等辺三角形（図の斜線部分）を切り取り，切り取った残りの図形を組み立てて，正方形ABCDを底面とする正四角錐をつくる。次の問に答えよ。

(1) 切り取る二等辺三角形の1つ分の面積を a と θ で表せ。

(2) 正四角錐の高さを a と θ で表せ。

(3) $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$ とするとき，正四角錐に内接する球の半径を a で表せ。

注：正四角錐とは底面が正方形で側面が全て二等辺三角形であるような四角錐である。



[解答欄]

(1) 図1のように点Aから正方形の変に下ろした垂線をAEとする。三角形AEO(Oは右下のものとする）について， $\mathrm{EO}=a$, $\mathrm{AE}=\mathrm{EO}\cdot\tan\angle\mathrm{AOE}=a\tan\theta$ となる。したがって， 求める二等辺三角形の面積は $a^2\tan\theta$ である。

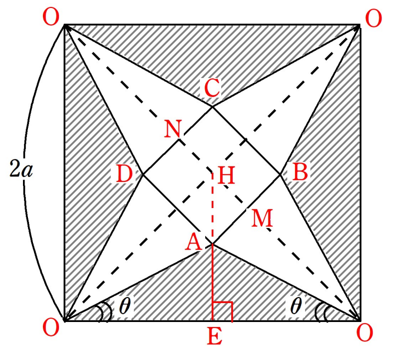


図 1: 正四角錐 O-ABCD の展開図

(2) 組み立てた正四角錐を O-ABCD とする。頂点Oから底面ABCDに下ろした垂線をOHとする。このとき， $\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{HA}^2}$, であり，

$$\mathrm{OA}=\frac{a}{\cos\theta},\quad \mathrm{HA}=\mathrm{HE}-\mathrm{AE}=a-a\tan\theta=a(1-\tan\theta)$$

となる。よって，正四角錐の高さOHは

$$\begin{aligned}\mathrm{OH}&=\sqrt{\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2-\{a(1-\tan\theta)\}^2}\\&=\sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1+2\tan\theta-\tan^2\theta\right)}\\&=a\sqrt{2\tan\theta}\end{aligned}$$

である。

(3) 辺AB, CDの中点をそれぞれM, Nとする。このとき，

$$\mathrm{OM}=\mathrm{OH}-\mathrm{MH}=\sqrt{2}\mathrm{HE}-\frac{\mathrm{AH}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\mathrm{a}-\frac{\mathrm{a}(1-\tan\theta)}{\sqrt{2}}=\frac{\mathrm{a}(1+\tan\theta)}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{MN}=\frac{\mathrm{HA}}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\mathrm{a}(1-\tan\theta)$$

となる。$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\mathrm{OM}=\mathrm{ON}=\mathrm{NM}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\mathrm{a}$ となるので，正四角錐O-ABCDにおいて三角形OMNは正三角形となる。

正四角錐O-ABCDに内接する球の半径を r とする。正四角錐O-ABCDを三角形OMNを含む平面で切った時の切り口は図2のようになる。三角形OMNの面積を r を使って表すと

$$\frac{r}{2}(\mathrm{ON}+\mathrm{NM}+\mathrm{MO})=\frac{r}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}a\cdot 3=\sqrt{2}ar$$

となる。また，図2において，(2)と $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$ より，$\mathrm{OH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$ である。これにより三角形OMNの面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{MN}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}a\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{2\sqrt{3}}{9}a^2$$

となる。したがって，$\sqrt{2}ar=\frac{2\sqrt{3}}{9}a^2$ より $r=\dfrac{\sqrt{6}}{9}a$ である。

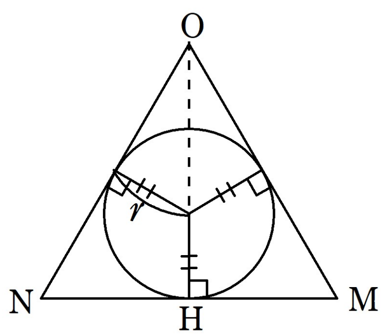


図 2: 切り口

得 点

数　　学

氏名	

受験番号	

3　次の 2 条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

1. $a_1 > 0,\ a_{n+1} \neq a_n\ (n = 1, 2, \cdots)$
2. 初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とするとき,

$$S_n = a_n^2 + na_n - 4 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

このとき次の問に答えよ。

(1) 初項 a_1 を求めよ。

(2) $b_n = a_{2n-1},\ c_n = a_{2n}\ (n = 1, 2, \cdots)$ とするとき，数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $a_k = 0$ を満たす k を求めよ。

[解答欄]

(1) $a_1 > 0$ かつ $a_1 = S_1 = a_1^2 + a_1 - 4$ なので，これを解いて $a_1 = 2$ となる。

(2) $a_k = S_k - S_{k-1}$ なので

$$\begin{aligned} a_k &= (a_k^2 + ka_k - 4) - \{a_{k-1}^2 + (k-1)a_{k-1} - 4\} \\ &= a_k^2 - a_{k-1}^2 + ka_k - (k-1)a_{k-1} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$0 = a_k^2 - a_{k-1}^2 + (k-1)a_k - (k-1)a_{k-1} = (a_k - a_{k-1})\{a_k + a_{k-1} + (k-1)\}$$

となる。仮定から $a_k - a_{k-1} \neq 0$ なので $a_k + a_{k-1} + (k-1) = 0$ である。すなわち，$a_k + a_{k-1} = -k + 1$ なので

$$\begin{aligned} b_{k+1} + c_k &= a_{2k+1} + a_{2k} = -(2k+1) + 1 = -2k \\ c_k + b_k &= a_{2k} + a_{2k-1} = -2k + 1 \end{aligned}$$

となる。これより

$$b_{k+1} - b_k = -1$$

となり，$b_1 = a_1 = 2$ なので $\{b_n\}$ は初項 2，公差 -1 の等差数列である。したがって一般項は

$$b_n = 2 - (n-1) = -n + 3$$

となる。また，$c_k + b_k = a_{2k} + a_{2k-1} = -2k + 1$ より $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = -b_n - 2n + 1 = -(-n+3) - 2n + 1 = -n - 2$$

となる。

(3) (2) より $c_n < 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$ であり，$b_n = 0$ となるのは $n = 3$ のみ。したがって $a_k = 0$ となるのは $a_k = b_3$ のときのみ，すなわち $k = 5$ のときのみである。

得点	

数　　学

氏 名	

受験番号	

4 　原点を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円 C_1 と媒介変数表示 $x = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $y = \tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の表す曲線 C_2 について，次の問に答えよ。

(1) C_1 と C_2 の第 1 象限にある交点を求めよ。

(2) (1) で求めた交点における C_2 の接線の方程式を求めよ。

(3) C_1 と C_2 で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

[解答欄]

(1) $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$ なので，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意すると曲線の方程式はそれぞれ

$$C_1 : x^2 + y^2 = 3 \qquad C_2 : x^2 - y^2 = 1(x \geqq 1)$$

となる。したがって, 求める交点は $x^2 + (x^2 - 1) = 3$ を解いて $x = \sqrt{2}$ $(x \geqq 1)$ なので $(\sqrt{2}, 1)$ である。

(2) $x = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $y = \tan\theta$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$$

となる。したがって，点 $(\sqrt{2}, 1)$ における接線の方程式の傾きは $\sqrt{2}$ となるので求める方程式は $y-1 = \sqrt{2}(x-\sqrt{2}) = \sqrt{2}x-2$, すなわち $y = \sqrt{2}x - 1$ である。

(3) 求める体積 V は

$$\begin{aligned} V = &= 2\pi\int_0^1 \{(3-y^2) - (y^2+1)\}dy \\ &= -4\pi\int_0^1 (y^2-1)dy \\ &= -4\pi\left[\frac{y^3}{3} - y\right]_0^1 \\ &= -4\pi\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

である。

得点	

数　　　学

氏 名	

受 験 番 号	

$\boxed{5}$ 座標空間において原点 O, 点 $A(1,-2,2)$, 点 $B(3,-4,5)$ をとり, 3 点 O, A, B が定める平面を α とする。このとき次の問に答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ を成分表示せよ。

(2) 点 F は平面 α 上にあり, その位置ベクトル $\vec{f}$ は $\overrightarrow{OA}$ と垂直な単位ベクトルである。ただし, $\vec{f}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角 θ は不等式 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たしている。点 F の座標を求めよ。

(3) 点 $P(0,0,2)$ の位置ベクトルを $\vec{p}$ とおく。s, t が実数全体を動くとき, $|\vec{p}-(s\vec{e}+t\vec{f})|$ の最小値を求めよ。

[解答欄]

(1) $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{9}=3$ より $\vec{e}=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{-2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ となる。

(2) 点 F は平面 α 上にあるので

$$\vec{f}=\overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}$$

となる実数 k,l がある。$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{e}=3,\ \overrightarrow{OB}\cdot\vec{e}=\frac{1}{3}(2+8+10)=7$ に注意すると, $\vec{f}\perp\vec{e}$ なので

$$\vec{f}\cdot\vec{e}=3k+7l=0$$

となり, $k=-7c,\ l=3c$ (c は実数) と書ける。このとき

$$\vec{f}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}=c\left(-7\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right)=c(2,2,1)$$

となり, $\vec{f}\cdot\overrightarrow{OB}=c(6-8+5)=3c$ となる。$\vec{f}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角 θ は不等式 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たしているので $\vec{f}\cdot\overrightarrow{OB}>0$, すなわち $c>0$ である。よって $\vec{f}$ は方向が $(2,2,1)$ の単位ベクトルであるから

$$\vec{f}=\frac{1}{\sqrt{4+4+1}}(2,2,1)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

となる。

(3) $|\vec{p}|=2,\ \vec{p}\cdot\vec{e}=\dfrac{4}{3},\ \vec{p}\cdot\vec{f}=\dfrac{2}{3},\ |\vec{e}|=|\vec{f}|=1,\ \vec{e}\cdot\vec{f}=0$ を用いると

$$\begin{aligned}|\vec{p}-(s\vec{e}+t\vec{f})|^2 &= (\vec{p}-(s\vec{e}+t\vec{f}))\cdot(\vec{p}-(s\vec{e}+t\vec{f}))\\ &= |\vec{p}|^2-2(s\vec{p}\cdot\vec{e}+t\vec{p}\cdot\vec{f})+s^2|\vec{e}|^2+2st\vec{e}\cdot\vec{f}+t^2|\vec{f}|^2\\ &= 4-\frac{8}{3}s-\frac{4}{3}t+s^2+t^2\\ &= \left(s-\frac{4}{3}\right)^2+\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{16}{9}\end{aligned}$$

となるので $s=\dfrac{4}{3},\ t=\dfrac{2}{3}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{16}{9}}=\dfrac{4}{3}$ をとる。

得 点	