'22 前期日程

数　学　問　題

（理工学部　物質・環境類）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この『数学問題』を開いてはいけません。
2. この中には, 2 枚の下書用紙と, 問題文を含む 6 枚の解答用紙があります。
3. 試験開始後，直ちに, 二つ折りになっているすべての用紙を広げてください。
4. 問題に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所があった場合は申し出てください。
5. 氏名と受験番号は，問題 $\boxed{5}$ と問題 $\boxed{6}$ を含むすべての解答用紙の所定の欄に必ず記入してください。
6. 問題 $\boxed{1}$ から問題 $\boxed{4}$ までは全て解答してください。 問題 $\boxed{5}$ (数学 III を含まない) と問題 $\boxed{6}$ (数学 III を含む) は選択問題ですので、どちらか 1 題を選択し, その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。また, 選択しなかった問題の解答欄に 「選択しない」 と記入してください。「選択しない」 と記入しなかった場合や問題 $\boxed{5}$ と問題 $\boxed{6}$ の両方を解答した場合は, 両方の答案が 0 点になることがありますので, 注意してください。
7. 解答用紙の裏面は計算等の下書きに使用しても構いませんが，解答は各問題の下の解答欄に記入し, 裏面は解答に使用しないでください。解答用紙の裏面に解答してもその部分は採点しません。
8. 問題 $\boxed{5}$ と問題 $\boxed{6}$ の選択問題の解答用紙を含む 6 枚の解答用紙のみを回収しますので, この表紙と 2 枚の下書用紙は持ち帰ってください。

下　書　用　紙　(1)

下　書　用　紙　(2)

数　　　学

氏 名	

受験番号	

$\boxed{1}$ 3 つの袋 A，B，C それぞれに，1 から 30 までの番号を 1 つずつ書いた 30 枚のカードが入っている。A，B，C の袋からカードを 1 枚ずつ取り出す。全部で 30^3 通りのすべての取り出し方について考える。このとき，取り出した 3 枚のカードの番号を，X，Y，Z $(X \leqq Y \leqq Z)$ とする。たとえば，A，B，C の袋から，それぞれ 24，16，24 を取り出したとき，$X = 16$，$Y = Z = 24$ である。

(1) Z が 10 以下となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

(2) Y が 12 となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

(3) Y が 12 で，X，Y，Z が等比数列となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

[解答欄]

得点	

数　　　学

氏 名	

受験番号	

$\boxed{2}$ 座標平面上で，不等式 $\dfrac{2^{x+1}}{3^{y-1}}+\dfrac{3^{y-1}}{2^x} \leqq 3$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を D とする。

(1) 点 $(\log_2 3,\ \log_3 9)$ は D に属することを示せ。

(2) 不等式 $t-3+\dfrac{2}{t} \leqq 0$ を満たす正の実数 t の範囲を求めよ。

(3) D を図示せよ。

[解答欄]

得点	

数　　学

氏 名	

受験番号	

$\boxed{3}$ 座標空間の 6 点 O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 2), D(2, 0, 2), E(0, 2, 2) を頂点とする三角柱 OAB−CDE がある。この三角柱の辺 OC 上の動点を P とし，$\angle \mathrm{OBP} = \theta$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ)$ とする。3 点 P，A，B を通る平面で三角柱を切ったとき，切り口の図形の面積を $S(\theta)$ とする。

(1) $S(45^\circ)$ を求めよ。

(2) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$S(\theta)$ を求めよ。

[解答欄]

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

4 a，b を実数の定数とする。座標平面において，$y = x^3 + ax^2 + 2bx$ で表される曲線を C とする。点 A$(1, -6)$ は C 上にあり，点 A における C の接線を ℓ とするとき，ℓ の傾きは -5 である。$f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx$ とおき，ℓ の方程式を $y = g(x)$ とする。

(1) a と b の値を求めよ。

(2) $f(x) - g(x)$ を因数分解せよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{0} |f(x) - g(x)|\, dx$ を求めよ。

[解答欄]

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

問題 $\boxed{5}$ と問題 $\boxed{6}$ は選択問題ですので、どちらか 1 題を選択し，その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。
また，選択しなかった問題の解答欄に 「選択しない」 と記入してください。

$\boxed{5}$ 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフは，x 軸と 2 点 $(-3, 0)$，$(1, 0)$ で交わり，頂点の y 座標は 4 である。2 次関数 $y = g(x)$ のグラフは，$y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。r を $0 < r < \dfrac{1}{2}$ を満たす定数とするとき，$R(t) = (1-r)\displaystyle\int_{-1}^{t} g(x)\,dx + r\int_{t}^{1} f(x)\,dx$ $(-1 < t < 1)$ とおく。

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

(2) t の関数 $R(t)$ の導関数 $R'(t)$ を求めよ。

(3) $s = \dfrac{1}{1-2r}$ とおく。$R(t)$ が極値をとるときの t を s を用いて表せ。

[解答欄]

得点	

数　　学

氏 名	

受験番号	

問題 $\boxed{5}$ と問題 $\boxed{6}$ は選択問題ですので、どちらか１題を選択し，その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。
また，選択しなかった問題の解答欄に 「選択しない」 と記入してください。

$\boxed{6}$ 　複素数平面上で，点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき， $w = 2 - iz$ で表される点 w の描く図形を C とする。また，$a = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，$b = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$，$b = \cos\beta + i\sin\beta$ を満たす実数 α と β を求めよ。ただし，$0 \leqq \alpha < 2\pi$，$0 \leqq \beta < 2\pi$ とする。

(2) C を複素数平面上に図示せよ。

(3) $a^n = 2 - i\,b^n$ を満たす自然数 n のうち，最小のものを求めよ。

[解答欄]

得点	