数　学

氏名	

受験番号	

1　1個のさいころを3回続けて投げるとき，出た目の数を順に a，b，c とおく。以下の問に答えよ。

(1) a，b，c のうち，少なくとも2つは偶数である確率を求めよ。

(2) 積 abc が60である確率を求めよ。

(3) 2次方程式 $x^2-(a+b)x+c=0$ が虚数解をもつ確率を求めよ。

[解答欄]

(1) 3回さいころを投げるとき，目の出方は全部で 6^3 通り．

その中，偶数が2回，奇数が1回出る場合は，${}_3C_1 \cdot 3\times3\times3=3^4$ 通り

偶数が3回出る場合は $3\times3\times3=3^3$ 通り

よって求める確率は $\dfrac{3^4+3^3}{6^3}=\dfrac{3+1}{2^3}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$

(1) 別解 a, b, c が偶数か奇数かはいずれも $\frac{1}{2}$ の確率なので，

$$\underbrace{{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1}_{\text{偶数が2回, 奇数が1回}}+\underbrace{{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3}_{\text{偶数が3回}}=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

(2) $abc=60$ となるのは，a, b, c が組として $\{2, 5, 6\}$ または $\{3, 4, 5\}$ となる場合である。各場合につき，$3\times2\times1=6$ 通りある。

ゆえに求める確率は $\dfrac{6+6}{6^3}=\dfrac{12}{6^3}=\dfrac{1}{18}$.

(3) 判別式が負，すなわち $(a+b)^2<4c$ のときである．

$1\leqq c\leqq 6$ に注意し，$c=1$ のとき これをみたす (a, b) は存在しない．

$c=2$ のとき，$(a+b)^2<8 \Rightarrow a+b=2 \Rightarrow (a, b)=(1, 1)$ の1通り

$c=3$ のとき $(a+b)^2<12 \Rightarrow a+b=2$ または $3 \Rightarrow (a, b)=(1, 1), (1, 2), (2, 1)$ の3通り

$c=4$ のとき $(a+b)^2<16 \Rightarrow a+b=2$ または $3 \Rightarrow$ 上の3通り

$c=5$ のとき $(a+b)^2<20 \Rightarrow a+b=2, 3$, または $4 \Rightarrow$ 上の3通りと $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ とで 6通り．

$c=6$ のとき $(a+b)^2<24 \Rightarrow a+b=2, 3$ または $4 \Rightarrow$ 上の6通り

よって全部で $1+3+3+6+6=19$ 通り

ゆえに求める確率は $\dfrac{19}{6^3}=\dfrac{19}{216}$

得点	

数　学

氏名	

受験番号	

2 数列 $\{a_n\}$ は次の条件によって定められている。

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{n+1}{3n}\,a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問に答えよ。

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

[解答欄]

(1) $a_2 = \frac{2}{3}a_1 = \frac{4}{3}$, $a_3 = \frac{3}{6}a_2 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{4}{9}a_3 = \frac{8}{27}$

(2) $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3}\frac{a_n}{n}$ から $b_n = \frac{a_n}{n}$ とおくと、$\{b_n\}$ は初項2 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列となる。ゆえに $b_n = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $a_n = nb_n = 2n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2)別解 $a_n = \frac{1}{3}\frac{n}{n-1}a_{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{n(n-1)}{(n-1)(n-2)}a_{n-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{n(n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)(n-3)}a_{n-3}$

$= \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\frac{n\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cdots\cancel{2}}{\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}\cdots 1}a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}n\cdot 2$

(3) $S = 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + 2n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$

両辺に $\frac{1}{3}$ を掛けると

$\frac{1}{3}S = 2\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + 2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

辺々引くと

$\frac{2}{3}S = 2\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots 2\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \underbrace{2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}_{2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = 3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

よって $S = \frac{9}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) - 3n\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{9}{2} - \left(\frac{9}{2} + 3n\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n$

得点	

数　　学

氏名	

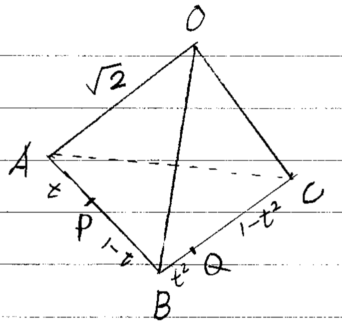
受験番号	

3 1辺の長さが$\sqrt{2}$の正四面体OABCがある。辺ABを$t:(1-t)$に内分する点をP，辺BCを$t^2:(1-t^2)$に内分する点をQとする。ただし，tは$0<t<1$を満たす実数とする。以下の問に答えよ。

(1) 内積$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$t$を用いて表せ。

(2) 内積$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$の最大値と，そのときの実数$t$の値を求めよ。

[解答欄]



(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．このとき

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$, $\overrightarrow{OQ}=(1-t^2)\vec{b}+t^2\vec{c}$,

OABCは1辺の長さ$\sqrt{2}$の正四面体であるので，

$$\left.\begin{aligned}&\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 2\cdot\tfrac{1}{2}=1\\ &\text{同様に } \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1\ \text{，また } |\vec{b}|=\sqrt{2}\end{aligned}\right\}(*)$$

よって $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left((1-t)\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\left((1-t^2)\vec{b}+t^2\vec{c}\right)$

$=(1-t)(1-t^2)\vec{a}\cdot\vec{b}+t(1-t^2)|\vec{b}|^2+(1-t)t^2\vec{a}\cdot\vec{c}+t^3\vec{b}\cdot\vec{c}$

(*)より $=(1-t)(1-t^2)+2t(1-t^2)+(1-t)t^2+t^3$

$=t^3-t^2-t+1+2t-2t^3+t^2-t^3+t^3=-t^3+t+1$

(2) $f(t)=-t^3+t+1$ とおいて $0<t<1$の範囲での最大値を調べる．

$f'(t)=-3t^2+1=-3\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

t	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ は最大値

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+1$

$=\frac{2\sqrt{3}}{9}+1$ をとる。

得点	

数　学

氏名	

受験番号	

4 $f(x) = x\log(1+x)$ とおく。ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す。以下の問に答えよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(0, 0)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3) 直線 $y = x$ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

[解答欄]

(1) $f'(x) = \log(1+x) + x \cdot \dfrac{1}{1+x}$ より $f'(0) = \log 1 = 0$.

$(0,0)$ における接線は $y - 0 = 0(x-0)$ すなわち $y = 0$

(2) $f(x)$ の定義域は $-1 < x$.

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{2+x}{(1+x)^2} > 0 \quad (-1 < x)$$

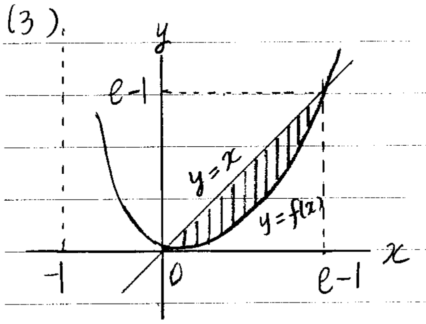
x	-1		0	
$f''(x)$		$+$		$+$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(x)$ は $-1 < x \leqq 0$ で単調に減少し

$0 \leqq x$ で単調に増加する.

$x = 0$ で極小値 0 をとる.

(3)



$y = x$ と $y = x\log(1+x)$ の交点は

$x(1-\log(1+x)) = 0$ より $x = 0$ および

$\log(1+x) = 1 \to x = e-1$

$$\int_0^{e-1} \left(x - x\log(1+x)\right) dx = \int_0^{e-1} x\left(1 - \log(1+x)\right) dx$$

$$= \underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\left(1-\log(1+x)\right)\right]_0^{e-1}}_{=0} + \int_0^{e-1} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{(t-1)^2}{t}\, dt$$

$1 + x = t$ とおくと

$dx = dt$

x	$0 \nearrow e-1$
t	$1 \nearrow e$

$$= \frac{1}{2}\int_1^e t - 2 + \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2} - 2t + \log t\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - 2e + 1 - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{e^2}{4} - e + \frac{5}{4}$$

得点	

理工電子機械 5

数　学

氏名	

受験番号	

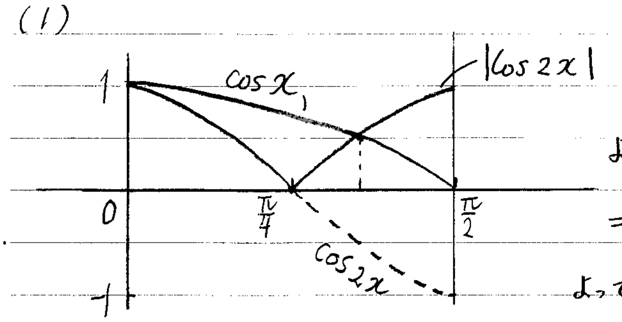
5　以下の問に答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲において，２つの関数 $y=|\cos x|$，$y=|\cos 2x|$ のグラフのみで囲まれた部分の面積，および２つの関数 $y=|\cos x|$，$y=|\cos 2x|$ のグラフと直線 $x=\frac{\pi}{2}$ で囲まれた部分の面積の和を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲において，２つの関数 $y=\cos x$，$y=\cos 2x$ のグラフと直線 $x=\frac{\pi}{2}$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに１回転させてできる立体の体積を求めよ。

［解答欄］

(1)



$0<x<\frac{\pi}{2}$ における $y=\cos x=|\cos x|$ と $y=|\cos 2x|$ との交点の x 座標は左図より $\cos x=-\cos 2x$ を満たす。右辺 $-\cos 2x=1-2\cos^2 x$ であるから，$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$ よって $\cos x=\frac{1}{2}$，$x=\frac{\pi}{3}$ である。

$$\overset{①}{\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\cos 2x)\,dx}+\overset{②}{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos x+\cos 2x)\,dx}+\overset{③}{\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos 2x-\cos x)\,dx}$$

$$=\left[\sin x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4}+\left[\sin x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-\left[\frac{\sin 2x}{2}+\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{1}{2}\right)-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}-2$$

（上記①②が $y=|\cos x|$，$y=|\cos 2x|$ のグラフのみで囲まれた部分の面積，
③が 〃 〃 と直線 $x=\frac{\pi}{2}$ で囲まれた部分の面積）

(2) 回転体は，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ では内側が $y=\cos 2x$ の回転面，外側が $y=\cos x$ の回転面，$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ では外側が $y=\cos x$ で内側はつまっている，$\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ では外側が $y=\cos 2x$ で内側はつまっている．よって 体積 V は，

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x-\cos^2 2x)\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x\,dx$$

ここで $\cos^2 x=\frac{\cos 2x+1}{2}$，$\cos^2 2x=\frac{\cos 4x+1}{2}$，$\cos^2 x-\cos^2 2x=\frac{\cos 2x-\cos 4x}{2}$ より

$$V=\pi\left[\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\pi\left[\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\pi\left[\frac{\sin 4x}{8}+\frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi\cancel{\frac{1}{4}}+\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\cancel{\frac{\pi}{6}}-\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{\pi}{8}\right)+\pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{16}-\cancel{\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$$

得点	