数　学

氏　名	
受　験 番　号	

解答は，最後の答えだけを書くのではなく，その答えを導き出した過程がわかるように式・説明なども書いてください。

問 1　関数 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$ の最小値を求めよ。また，その時の x の値を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸，および 2 直線 $x = -2, x = 3$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

[解答例]

(1) $y = (x-1)^2 - 4$ なので，$x = 1$ のとき最小値は -4 となる。

(2) $y = f(x)$ と x 軸との交点の x 座標は $x^2 - 2x - 3 = 0$ を解いて $x = -1$，$x = 3$ となる。
求める面積 S は，

$$S = \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{3}\{-f(x)\}dx$$
$$= \int_{-2}^{-1}(x^2 - 2x - 3)dx - \int_{-1}^{3}(x^2 - 2x - 3)dx$$
$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-2}^{-1} - \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3}$$
$$= \tfrac{7}{3} + \tfrac{32}{3} = \tfrac{39}{3} = 13$$

となる。

得 点	

数　学

氏　名	
受　験 番　号	

解答は，最後の答えだけを書くのではなく，その答えを導き出した過程がわかるように式・説明なども書いてください。

問 2　以下の命題が成り立つかどうかを答えよ。また，成り立つときは証明し，成り立たないときは反例を示せ。

(1) すべての自然数 n について，$n^2 \leqq 2^n$ となる。

(2) すべての自然数 n について，$2^n \leqq n!$ となる。

(3) すべての自然数 n について，$n! \leqq n^n$ となる。

[解答例]

(1) 成り立たない。反例は，$n = 3$ のとき，$3^2 = 9 > 2^3 = 8$ である。

(2) 成り立たない。反例は，$n = 1$ のとき，$2^1 = 2 > 1! = 1$ である。

(3) 成り立つ。これについて，n に関する数学的帰納法を用いて，以下に証明を示す。

[1] $n = 1$ のとき，$1! = 1 \leqq 1^1 = 1$ となるので成り立つ。

[2] $n = k$ のとき，式 1: $k! \leqq k^k$ が成り立つとする。

ここで，$n = k + 1$ について考えると，まず，式 2: $(k+1)! = k! \cdot (k+1)$ が成り立つ。

さらに，式 3: $(k+1)^{(k+1)} = (k+1)^k \cdot (k+1)$ である。また，

$$(k+1)^k = k^k + (\text{何らかの自然数}) \geqq k^k,$$

なので，式 1 を用いて $(k+1)^k \geqq k!$ である。さらに，式 2 と式 3 より $(k+1)! \leqq (k+1)^{(k+1)}$ が成り立つ。

これは，$n = k + 1$ のとき不等式が成り立つことを示している。

したがって，[1] および [2] より，すべての自然数 n について $n! \leqq n^n$ となる。(証明終)

得 点	